国家教材委员会专家委员会审核通过 2019

普通高中教科书

数学 SHUXUE

必修 第一册

北京师范大学出版社

目录

§3 函数的单调性和最值

函数是刻画变量关系的.研究函数 $y=f(x)$ 时比较关心的问题是:当自变量 x 变化时,函数值 $f(x)$ 随之怎样变化.我们知道,一元一次函数 $y=kx+b$,当 $k>0$ 时,在 $\mathbf{R}$ 上 y 值随 x 值的增大而增大;当 $k<0$ 时,在 $\mathbf{R}$ 上 y 值随 x 值的增大而减小.一元二次函数和反比例函数也有类似的性质.可见,用增大或减小来刻画函数在一个区间的变化是非常重要的.

实例分析

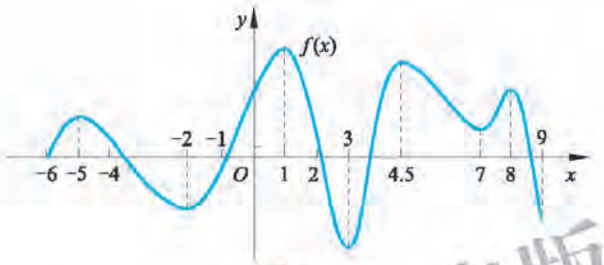

图 2-9

图 2-9 是函数 $f(x)$($x\in[-6,9]$)的图象.直观上可以看出,对于区间 $[-6,-5]$,$[-2,1]$,$[3,4.5]$,$[7,8]$,每个区间上函数值 $f(x)$ 都随 x 值的增大而增大;对于区间 $[-5,-2]$,$[1,3]$,$[4.5,7]$,$[8,9]$,每个区间上函数值 $f(x)$ 都随 x 值的增大而减小.

思考交流

图 2-9 中,怎样用数学的符号语言表达函数值 $f(x)$ 在区间 $[-6,-5]$ 上随 x 值的增大而增大呢?

抽象概括

设函数 $y=f(x)$ 的定义域是 D:

如果对于任意的 $x_1,x_2\in D$,当 $x_1<x_2$ 时,都有 $f(x_1)<f(x_2)$,那么就称函数 $y=f(x)$ 是**增函数**.特别地,当 I 是定义域 D 上的一个区间时,也称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上**单调递增**.

如果对于任意的 $x_1,x_2\in D$,当 $x_1<x_2$ 时,都有 $f(x_1)>f(x_2)$,那么就称函数 $y=f(x)$ 是**减函数**.特别地,当 I 是定义域 D 上的一个区间时,也称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上**单调递减**.

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上单调递增或单调递减,那么就称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上具有**单调性**.此时,区间 I 为函数 $y=f(x)$ 的**单调区间**.

若存在实数 M,对所有的 $x\in D$,都有 $f(x)\leqslant M$,且存在 $x_0\in D$,使得 $f(x_0)=M$,则称 M

为函数 $y=f(x)$ 的**最大值**.

同样地,可以定义函数 $y=f(x)$ 的最小值. 函数的最大值和最小值统称为**最值**.

例 1 设 $f(x)=\frac{1}{x}(x<0)$,画出 $f(x+3)\ (x<-3)$ 的图象,并通过图象直观判断它的单调性.

解 依题意知 $f(x+3)=\frac{1}{x+3}(x<-3)$,其图象可由 $f(x)=\frac{1}{x}(x<0)$ 的图象向左平移 3 个单位长度得到(如图 2-10). 该函数在区间 $(-\infty,-3)$ 上单调递减.

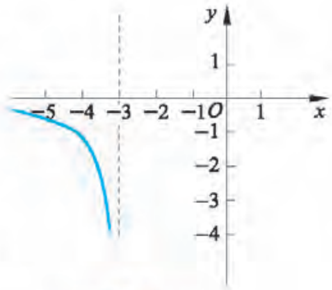

图 2-10

例 2 根据函数图象直观判断 $y=|x-1|$ 的单调性,并求出最小值.

解 函数 $y=|x-1|$ 可以表示为 $y=\begin{cases}1-x, x\leqslant 1,\\ x-1, x>1.\end{cases}$

画出该函数的图象(如图 2-11).

由图象可知该函数在区间 $(-\infty,1]$ 上单调递减,在区间 $[1,+\infty)$ 上单调递增. 当 $x=1$ 时,$y=|x-1|$ 取得最小值,最小值为 0.

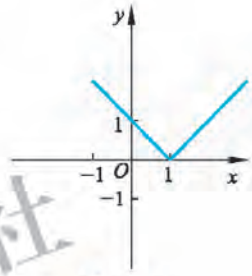

图 2-11

思考交流

对于函数 $f(x)=\frac{1}{x}$,$(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 都是它的单调区间,并且函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在这两个区间上都是单调递减,那么能否说函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在整个定义域上是减函数?

练 习

1. 试举出几个有关函数单调性的具体例子.
2. 仿照函数最大值的定义,给出函数 $y=f(x)$ 的最小值的定义.
3. 请根据函数图象直观判断下列函数在给定区间上的单调性,并求出它们的最值:

   (1) $y=-5x, x\in[2,7]$; (2) $f(x)=3x^2-6x+1, x\in[3,4)$;

   (3) $f(x)=|x^2-2x|, x\in[-1,3]$.
4. 某型号汽车使用单位体积燃料行驶的路程 $f(x)$(单位:km)是行驶速度 x(单位:km/h)的函数. 由实验可知,这一函数关系是 $f(x)=-0.01x^2+1.2x-5.8$.

   (1) 求 $f(50)$,并说明它的实际意义;

   (2) 当速度 x 为多少时,汽车最省油?

我们已经感受到，判定函数的单调性时，函数的图象能够起到很大的作用. 严格地说，判定函数的单调性，要依据函数单调性的定义，尤其是用解析法表示的函数，要通过代数运算的结果证明其单调性. 有的函数很复杂，图象很难画出，这时代数运算的价值更加凸显.

例 3 判断函数 $f(x)=-3x+2$ 的单调性，并给出证明.

解 画出函数 $f(x)=-3x+2$ 的图象(如图 2-12). 由图象可以看出，函数 $f(x)=-3x+2$在定义域 $\mathbf{R}$ 上可能是减函数.

下面利用函数单调性的定义证明这一结论.

任取 x_1，$x_2\in\mathbf{R}$，且 $x_1<x_2$，则 $x_1-x_2<0$.

所以
$$f(x_1)-f(x_2)=(-3x_1+2)-(-3x_2+2)=-3(x_1-x_2)>0,$$
即
$$f(x_1)>f(x_2).$$

由函数单调性的定义可知，函数 $f(x)=-3x+2$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上是减函数.

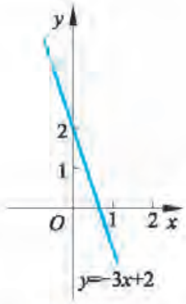

图 2-12

这个证明是在定义域内任取 $x_1<x_2$，通过计算 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的差，得到 $f(x_1)>f(x_2)$，从而由函数单调性的定义判断函数 $f(x)=-3x+2$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上是减函数.

例 4 判断函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 的单调性，并给出证明.

解 画出函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 的图象(如图 2-13). 由图象可以看出，函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 在定义域 $[0,+\infty)$ 上可能是增函数.

任取 x_1，$x_2\in[0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，则 $x_1-x_2<0$.

所以 $f(x_1)-f(x_2)=\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}=\dfrac{x_1-x_2}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}$.

由 $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}>0$，可知 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$.

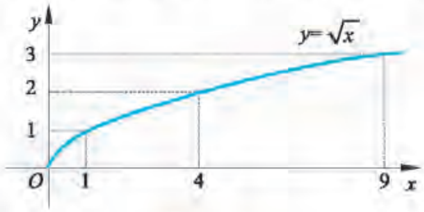

图 2-13

由函数单调性的定义可知，函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 在定义域 $[0,+\infty)$ 上是增函数.

这个证明是在定义域内任取 $x_1<x_2$，通过计算 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的差，得到 $f(x_1)<f(x_2)$，从而由函数单调性的定义判断函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 在定义域 $[0,+\infty)$ 上是增函数.

例 5 试用函数单调性的定义证明：函数 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1]$ 上单调递减，在区间 $[1,+\infty)$ 上单调递增.

证明 任取 x_1，$x_2\in(0,1]$，且 $x_1<x_2$.

$$f(x_1)-f(x_2)=\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)-\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)$$
$$=x_1-x_2-\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}$$
$$=(x_1-x_2)\left(1-\frac{1}{x_1x_2}\right)$$
$$=\frac{(x_1-x_2)(x_1x_2-1)}{x_1x_2}.$$

因为 $0<x_1<x_2\leqslant 1$，所以 $x_1-x_2<0$，$0<x_1x_2<1$，则 $\frac{(x_1-x_2)(x_1x_2-1)}{x_1x_2}>0$，即 $f(x_1)-f(x_2)>0$.

这表明函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1]$ 上单调递减.

同理可证，函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上单调递增.

在判断函数的单调性时，常常借助其图象，得到猜测. 证明函数 $f(x)$ 在一个区间上的单调性时，通常在这个区间上任取 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，然后计算 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的差，由其值大于 0 或小于 0 来判断 $f(x)$ 在该区间上的增减性.

练 习

1. 下列说法能否判断函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上单调递增？

   (1) 对于任意的 $x_1,x_2\in(a,b)$，$x_1\neq x_2$，都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$ 恒成立；

   (2) 存在 $x_1,x_2\in(a,b)$，使得 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$ 成立；

   (3) 对于任意的 $a<x_1<x_2<\frac{a+b}{2}$，都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$ 恒成立，并且对于任意的 $\frac{a+b}{2}\leqslant x_1<x_2<b$，都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$ 也恒成立.

2. 已知函数 $f(x)=x^2-2mx-3$ 在区间 $[1,2]$ 上单调，求实数 m 的取值范围.
3. 证明：函数 $y=2x+3$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上是增函数.

习题 2－3

A 组

1. 讨论下列函数在给定区间上的单调性：

   (1) $y=2x-3$，$x\in(-\infty, 0]$；

(2) $y=-4x^2+2x-5, x\in[0, +\infty)$.

2. 求函数 $y=x^2+1$ 在下列各区间上的最值：

(1) $[1,4]$； (2) $[-6,-2]$；

(3) $[-2,2]$； (4) $[-2,4]$.

3. 已知函数 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上是减函数，$a,b\in\mathbf{R}$，且 $a+b<0$. 请确定 $f(a)+f(b)$ 与 $f(-a)+f(-b)$的大小关系，并给出证明.

4. 已知下列函数在给定的区间上单调递减，求实数 k 的取值范围.

(1) $y=kx+2, x\in\mathbf{R}$；

(2) $y=\dfrac{k}{x}, x\in(-\infty,0)$；

(3) $y=kx^2-3x+1, x\in(1,+\infty)$.

5. 证明：函数 $y=1-\dfrac{1}{x}$在区间$(0,+\infty)$上单调递增.

B 组

1. 探究函数 $f(x)=mx^2+b$ 的单调性，并证明你的结论.

2. 根据函数图象直观判断函数 $y=|x^2-4x+3|$的单调性.

3. 已知函数 $f(x)$对任意实数 x 都有 $f(1+x)=f(1-x)$，并且对任意 $x_1<x_2<1$，总有$f(x_1)<f(x_2)$，比较下列各组值的大小：

(1) $f(1.2)$和 $f(1.5)$； (2) $f(-1)$和 $f(3)$；

(3) $f(-2)$和 $f(2)$； (4) $f(-\sqrt{2})$和 $f(\sqrt{3})$.

4. 已知函数 $f(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递增，$g(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递减，下列函数在区间$(0,+\infty)$ 上是否一定单调递增？

(1) $f(x)+g(x)$； (2) $f(x)-g(x)$；

(3) $f(x)\cdot g(x)$； (4) $f(x)+[g(x)]^2$.