



普通高中教科书

# 数学

必修

第一册

SHUXUE

北京师范大学出版社



北京师范大学出版社



# 目录

## 第一章 预备知识 / 1

§ 1 集合 .....	2
1.1 集合的概念与表示 .....	2
1.2 集合的基本关系 .....	5
1.3 集合的基本运算 .....	8
习题 1-1 .....	11
阅读材料 康托尔与集合论 .....	12
§ 2 常用逻辑用语 .....	14
2.1 必要条件与充分条件 .....	14
2.2 全称量词与存在量词 .....	18
习题 1-2 .....	22
§ 3 不等式 .....	24
3.1 不等式的性质 .....	24
3.2 基本不等式 .....	27
习题 1-3 .....	30
阅读材料 弦图 .....	31
§ 4 一元二次函数与一元二次不等式 .....	32
4.1 一元二次函数 .....	32
4.2 一元二次不等式及其解法 .....	34
4.3 一元二次不等式的应用 .....	38
习题 1-4 .....	39
本章小结 .....	41
复习题一 .....	44
学习指导 数学文化 .....	46

## 第二章 函数 / 47

§ 1 生活中的变量关系 .....	48
习题 2-1 .....	51
§ 2 函数 .....	52
2.1 函数概念 .....	52

2.2 函数的表示法 .....	54
习题 2-2 .....	56
阅读材料 函数概念的起源 .....	57
§ 3 函数的单调性和最值 .....	59
习题 2-3 .....	62
§ 4 函数的奇偶性与简单的幂函数 .....	64
4.1 函数的奇偶性 .....	64
4.2 简单幂函数的图象和性质 .....	65
习题 2-4 .....	67
本章小结 .....	68
复习题二 .....	70

### 第三章 指数运算与指数函数 / 73

§ 1 指数幂的拓展 .....	74
习题 3-1 .....	77
§ 2 指数幂的运算性质 .....	78
习题 3-2 .....	79
阅读材料 利用科学计算器计算函数值的近似值 .....	80
§ 3 指数函数 .....	82
3.1 指数函数的概念 .....	82
3.2 指数函数的图象和性质 .....	82
习题 3-3 .....	89
本章小结 .....	91
复习题三 .....	92

### 第四章 对数运算与对数函数 / 95

§ 1 对数的概念 .....	96
习题 4-1 .....	98
阅读材料 对数的起源 .....	99
§ 2 对数的运算 .....	100
2.1 对数的运算性质 .....	100
2.2 换底公式 .....	102
习题 4-2 .....	104
阅读材料 指数的换底公式 .....	106
§ 3 对数函数 .....	107
3.1 对数函数的概念 .....	107
3.2 对数函数 $y = \log_2 x$ 的图象和性质 .....	108
3.3 对数函数 $y = \log_a x$ 的图象和性质 .....	111

习题 4-3 .....	113
信息技术应用 参数 $a$ 对函数 $y = \log_a x$ 图象的影响 .....	114
阅读材料 数学软件 GeoGebra .....	115
§ 4 指数函数、幂函数、对数函数增长的比较 .....	116
习题 4-4 .....	117
* § 5 信息技术支持的函数研究 .....	118
本章小结 .....	121
复习题四 .....	123
学习指导 利用信息技术学习数学 .....	125

## 第五章 函数应用 / 127

§ 1 方程解的存在性及方程的近似解 .....	128
1.1 利用函数性质判定方程解的存在性 .....	128
1.2 利用二分法求方程的近似解 .....	130
习题 5-1 .....	132
§ 2 实际问题中的函数模型 .....	134
2.1 实际问题的函数刻画 .....	134
2.2 用函数模型解决实际问题 .....	137
习题 5-2 .....	139
本章小结 .....	140
复习题五 .....	142

## 第六章 统计 / 143

§ 1 获取数据的途径 .....	144
1.1 直接获取与间接获取数据 .....	144
1.2 普查和抽查 .....	144
1.3 总体和样本 .....	146
习题 6-1 .....	149
阅读材料 选举的预测 .....	149
§ 2 抽样的基本方法 .....	151
2.1 简单随机抽样 .....	151
信息技术应用 随机数的产生 .....	154
2.2 分层随机抽样 .....	155
习题 6-2 .....	157
§ 3 用样本估计总体分布 .....	159
3.1 从频数到频率 .....	159
3.2 频率分布直方图 .....	161
习题 6-3 .....	165

§ 4 用样本估计总体的数字特征 .....	166
4.1 样本的数字特征 .....	166
4.2 分层随机抽样的均值与方差 .....	169
4.3 百分位数 .....	173
习题 6-4 .....	175
本章小结 .....	176
复习题六 .....	178

## 第七章 概率 / 181

§ 1 随机现象与随机事件 .....	182
1.1 随机现象 .....	182
1.2 样本空间 .....	182
1.3 随机事件 .....	186
1.4 随机事件的运算 .....	188
习题 7-1 .....	192
§ 2 古典概型 .....	194
2.1 古典概型的概率计算公式 .....	194
2.2 古典概型的应用 .....	196
习题 7-2 .....	204
§ 3 频率与概率 .....	206
习题 7-3 .....	209
阅读材料 布丰投针问题 .....	210
§ 4 事件的独立性 .....	211
习题 7-4 .....	214
本章小结 .....	216
复习题七 .....	217

## 第八章 数学建模活动(一) / 219

§ 1 走近数学建模 .....	220
习题 8-1 .....	222
§ 2 数学建模的主要步骤 .....	223
习题 8-2 .....	225
§ 3 数学建模活动的主要过程 .....	226
习题 8-3 .....	233
附录 部分数学专业词汇中英文对照表 .....	234

函数是刻画变量关系的. 研究函数  $y=f(x)$  时比较关心的问题是: 当自变量  $x$  变化时, 函数值  $f(x)$  随之怎样变化. 我们知道, 一元一次函数  $y=kx+b$ , 当  $k>0$  时, 在  $\mathbf{R}$  上  $y$  值随  $x$  值的增大而增大; 当  $k<0$  时, 在  $\mathbf{R}$  上  $y$  值随  $x$  值的增大而减小. 一元二次函数和反比例函数也有类似的性质. 可见, 用增大或减小来刻画函数在一个区间的变化是非常重要的.



## 实例分析

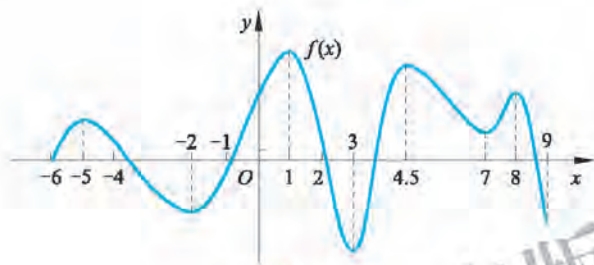


图 2-9

图 2-9 是函数  $f(x)$  ( $x \in [-6, 9]$ ) 的图象. 直观上可以看出, 对于区间  $[-6, -5]$ ,  $[-2, 1]$ ,  $[3, 4.5]$ ,  $[7, 8]$ , 每个区间上函数值  $f(x)$  都随  $x$  值的增大而增大; 对于区间  $[-5, -2]$ ,  $[1, 3]$ ,  $[4.5, 7]$ ,  $[8, 9]$ , 每个区间上函数值  $f(x)$  都随  $x$  值的增大而减小.



## 思考交流

图 2-9 中, 怎样用数学的符号语言表达函数值  $f(x)$  在区间  $[-6, -5]$  上随  $x$  值的增大而增大呢?



## 抽象概括

设函数  $y=f(x)$  的定义域是  $D$ :

如果对于任意的  $x_1, x_2 \in D$ , 当  $x_1 < x_2$  时, 都有  $f(x_1) < f(x_2)$ , 那么就称函数  $y=f(x)$  是增函数. 特别地, 当  $I$  是定义域  $D$  上的一个区间时, 也称函数  $y=f(x)$  在区间  $I$  上单调递增.

如果对于任意的  $x_1, x_2 \in D$ , 当  $x_1 < x_2$  时, 都有  $f(x_1) > f(x_2)$ , 那么就称函数  $y=f(x)$  是减函数. 特别地, 当  $I$  是定义域  $D$  上的一个区间时, 也称函数  $y=f(x)$  在区间  $I$  上单调递减.

如果函数  $y=f(x)$  在区间  $I$  上单调递增或单调递减, 那么就称函数  $y=f(x)$  在区间  $I$  上具有单调性. 此时, 区间  $I$  为函数  $y=f(x)$  的单调区间.

若存在实数  $M$ , 对所有的  $x \in D$ , 都有  $f(x) \leq M$ , 且存在  $x_0 \in D$ , 使得  $f(x_0) = M$ , 则称  $M$

为函数  $y=f(x)$  的最大值.

同样地,可以定义函数  $y=f(x)$  的最小值. 函数的最大值和最小值统称为最值.

**例 1** 设  $f(x)=\frac{1}{x}(x<0)$ , 画出  $f(x+3)(x<-3)$  的图象, 并通过图象直观判断它的单调性.

**解** 依题意知  $f(x+3)=\frac{1}{x+3}(x<-3)$ , 其图象可由  $f(x)=\frac{1}{x}(x<0)$  的图象向左平移 3 个单位长度得到(如图 2-10). 该函数在区间  $(-\infty, -3)$  上单调递减.

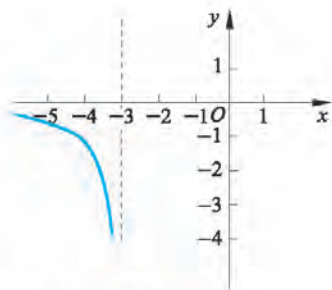


图 2-10

**例 2** 根据函数图象直观判断  $y=|x-1|$  的单调性, 并求出最小值.

**解** 函数  $y=|x-1|$  可以表示为  $y=\begin{cases} 1-x, & x \leq 1, \\ x-1, & x > 1. \end{cases}$

画出该函数的图象(如图 2-11).

由图象可知该函数在区间  $(-\infty, 1]$  上单调递减, 在区间  $[1, +\infty)$  上单调递增. 当  $x=1$  时,  $y=|x-1|$  取得最小值, 最小值为 0.

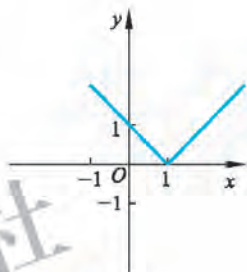


图 2-11



### 思考交流

对于函数  $f(x)=\frac{1}{x}$ ,  $(-\infty, 0)$  和  $(0, +\infty)$  都是它的单调区间, 并且函数  $f(x)=\frac{1}{x}$  在这两个区间上都是单调递减, 那么能否说函数  $f(x)=\frac{1}{x}$  在整个定义域上是减函数?



### 练习

- 试举出几个有关函数单调性的具体例子.
- 仿照函数最大值的定义, 给出函数  $y=f(x)$  的最小值的定义.
- 请根据函数图象直观判断下列函数在给定区间上的单调性, 并求出它们的最值:
  - $y=-5x, x \in [2, 7]$ ;
  - $f(x)=3x^2-6x+1, x \in [3, 4]$ ;
  - $f(x)=|x^2-2x|, x \in [-1, 3]$ .
- 某型号汽车使用单位体积燃料行驶的路程  $f(x)$  (单位: km) 是行驶速度  $x$  (单位: km/h) 的函数. 由实验可知, 这一函数关系是  $f(x)=-0.01x^2+1.2x-5.8$ .
  - 求  $f(50)$ , 并说明它的实际意义;
  - 当速度  $x$  为多少时, 汽车最省油?

我们已经感受到,判定函数的单调性时,函数的图象能够起到很大的作用.严格地说,判定函数的单调性,要依据函数单调性的定义,尤其是用解析法表示的函数,要通过代数运算的结果证明其单调性.有的函数很复杂,图象很难画出,这时代数运算的价值更加凸显.

**例 3** 判断函数  $f(x) = -3x + 2$  的单调性,并给出证明.

**解** 画出函数  $f(x) = -3x + 2$  的图象(如图 2-12).由图象可以看出,函数  $f(x) = -3x + 2$  在定义域  $\mathbf{R}$  上可能是减函数.

下面利用函数单调性的定义证明这一结论.

任取  $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ , 且  $x_1 < x_2$ , 则  $x_1 - x_2 < 0$ .

$$\begin{aligned} \text{所以 } f(x_1) - f(x_2) &= (-3x_1 + 2) - (-3x_2 + 2) \\ &= -3(x_1 - x_2) > 0, \end{aligned}$$

即  $f(x_1) > f(x_2)$ .

由函数单调性的定义可知,函数  $f(x) = -3x + 2$  在定义域  $\mathbf{R}$  上是减函数.

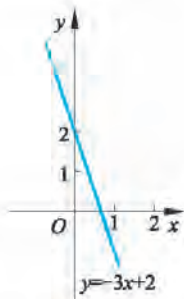


图 2-12

这个证明是在定义域内任取  $x_1 < x_2$ , 通过计算  $f(x_1)$  与  $f(x_2)$  的差, 得到  $f(x_1) > f(x_2)$ , 从而由函数单调性的定义判断函数  $f(x) = -3x + 2$  在定义域  $\mathbf{R}$  上是减函数.

**例 4** 判断函数  $f(x) = \sqrt{x}$  的单调性, 并给出证明.

**解** 画出函数  $f(x) = \sqrt{x}$  的图象(如图 2-13).由图象可以看出,函数  $f(x) = \sqrt{x}$  在定义域  $[0, +\infty)$  上可能是增函数.

任取  $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ , 且  $x_1 < x_2$ , 则  $x_1 - x_2 < 0$ .

$$\text{所以 } f(x_1) - f(x_2) = \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}.$$

由  $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} > 0$ , 可知  $f(x_1) - f(x_2) < 0$ , 即  $f(x_1) < f(x_2)$ .

由函数单调性的定义可知,函数  $f(x) = \sqrt{x}$  在定义域  $[0, +\infty)$  上是增函数.

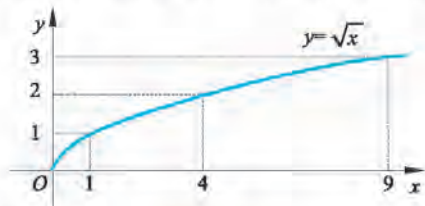


图 2-13

这个证明是在定义域内任取  $x_1 < x_2$ , 通过计算  $f(x_1)$  与  $f(x_2)$  的差, 得到  $f(x_1) < f(x_2)$ , 从而由函数单调性的定义判断函数  $f(x) = \sqrt{x}$  在定义域  $[0, +\infty)$  上是增函数.

**例 5** 试用函数单调性的定义证明: 函数  $f(x) = x + \frac{1}{x}$  在区间  $(0, 1]$  上单调递减, 在区间  $[1, +\infty)$  上单调递增.

**证明** 任取  $x_1, x_2 \in (0, 1]$ , 且  $x_1 < x_2$ .

$$\begin{aligned}
 f(x_1) - f(x_2) &= \left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) - \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) \\
 &= x_1 - x_2 - \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} \\
 &= (x_1 - x_2) \left(1 - \frac{1}{x_1 x_2}\right) \\
 &= \frac{(x_1 - x_2)(x_1 x_2 - 1)}{x_1 x_2}.
 \end{aligned}$$

因为  $0 < x_1 < x_2 \leq 1$ , 所以  $x_1 - x_2 < 0$ ,  $0 < x_1 x_2 < 1$ , 则  $\frac{(x_1 - x_2)(x_1 x_2 - 1)}{x_1 x_2} > 0$ ,

即  $f(x_1) - f(x_2) > 0$ .

这表明函数  $f(x) = x + \frac{1}{x}$  在区间  $(0, 1]$  上单调递减.

同理可证, 函数  $f(x) = x + \frac{1}{x}$  在区间  $[1, +\infty)$  上单调递增.

在判断函数的单调性时, 常常借助其图象, 得到猜测. 证明函数  $f(x)$  在一个区间上的单调性时, 通常在这个区间上任取  $x_1, x_2$ , 且  $x_1 < x_2$ , 然后计算  $f(x_1)$  与  $f(x_2)$  的差, 由其值大于 0 或小于 0 来判断  $f(x)$  在该区间上的增减性.



## 练习

1. 下列说法能否判断函数  $f(x)$  在区间  $(a, b)$  上单调递增?

(1) 对于任意的  $x_1, x_2 \in (a, b)$ ,  $x_1 \neq x_2$ , 都有  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$  恒成立;

(2) 存在  $x_1, x_2 \in (a, b)$ , 使得  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$  成立;

(3) 对于任意的  $a < x_1 < x_2 < \frac{a+b}{2}$ , 都有  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$  恒成立, 并且对于任意的  $\frac{a+b}{2} \leq x_1 < x_2 <$

$b$ , 都有  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$  也恒成立.

2. 已知函数  $f(x) = x^2 - 2mx - 3$  在区间  $[1, 2]$  上单调, 求实数  $m$  的取值范围.

3. 证明: 函数  $y = 2x + 3$  在定义域  $\mathbf{R}$  上是增函数.

## 习题 2-3

### A 组

1. 讨论下列函数在给定区间上的单调性:

(1)  $y = 2x - 3, x \in (-\infty, 0]$ ;

$$(2) y = -4x^2 + 2x - 5, x \in [0, +\infty).$$

2. 求函数  $y = x^2 + 1$  在下列各区间上的最值:

$$(1) [1, 4];$$

$$(2) [-6, -2];$$

$$(3) [-2, 2];$$

$$(4) [-2, 4].$$

3. 已知函数  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上是减函数,  $a, b \in \mathbf{R}$ , 且  $a + b < 0$ . 请确定  $f(a) + f(b)$  与  $f(-a) + f(-b)$  的大小关系, 并给出证明.

4. 已知下列函数在给定的区间上单调递减, 求实数  $k$  的取值范围.

$$(1) y = kx + 2, x \in \mathbf{R};$$

$$(2) y = \frac{k}{x}, x \in (-\infty, 0);$$

$$(3) y = kx^2 - 3x + 1, x \in (1, +\infty).$$

5. 证明: 函数  $y = 1 - \frac{1}{x}$  在区间  $(0, +\infty)$  上单调递增.

## B 组

1. 探究函数  $f(x) = mx^2 + b$  的单调性, 并证明你的结论.

2. 根据函数图象直观判断函数  $y = |x^2 - 4x + 3|$  的单调性.

3. 已知函数  $f(x)$  对任意实数  $x$  都有  $f(1+x) = f(1-x)$ , 并且对任意  $x_1 < x_2 < 1$ , 总有  $f(x_1) < f(x_2)$ , 比较下列各组值的大小:

$$(1) f(1.2) \text{ 和 } f(1.5); \quad (2) f(-1) \text{ 和 } f(3);$$

$$(3) f(-2) \text{ 和 } f(2); \quad (4) f(-\sqrt{2}) \text{ 和 } f(\sqrt{3}).$$

4. 已知函数  $f(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  上单调递增,  $g(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  上单调递减, 下列函数在区间  $(0, +\infty)$  上是否一定单调递增?

$$(1) f(x) + g(x);$$

$$(2) f(x) - g(x);$$

$$(3) f(x) \cdot g(x);$$

$$(4) f(x) + [g(x)]^2.$$